Egzamin częściowy dla studentów ekonomii z analizy matematycznej, 6 stycznia 2007

Każde zadanie musi być napisane na oddzielnej kartce

Zaczynamy od podpisania **wszystkich** *kartek* **własnymi** *danymi*:

Lewy górny róg strony:	*Prawy górny róg strony:*
nr indeksu	rok studiów, nr grupy ćwiczeniowej
Nazwisko i imię	Nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia
data urodzenia: *dd mm rr*	

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych (nie dotyczy rozruszników serca); jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Wszystkie obliczenia muszą być umieszczone w pracy, w rozumowaniach należy powoływać się na twierdzenia z wykładu lub z ćwiczeń, w przypadku stosowania twierdzeń, które nie wystąpiły na zajęciach, należy je udowodnić.

Mają Państwo około 8100 sekund na rozwiązanie tych kilku zadań i napisanie ich rozwiązań!

---

1. (10 pt.) Wykazać, że $\frac{1}{3} < \ln 1{,}5 < \frac{1}{2}$.

---

2. (10 pt.) Niech $a_{n+1} = a_n^3 - 6a_n^2 + 12a_n - 6$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Wyjaśnić, czy ciąg (a_n) ma granicę i znaleźć ją, jeśli istnieje. Wynik może zależeć od a_0.

---

3. (10 pt.) Znany hazardzista, kawaler de Tignasse, sądził, że prawdopodobieństwo p_2 wyrzucenia co najmniej jednej pary jedynek w 24 rzutach parą sześciennych kostek jest równe prawdopodobieństwu p_3 wyrzucenia co najmniej jednej trójki jedynek w 144 rzutach trzema kostkami. Okazało się jednak, że $p_2 = 1 - (\frac{35}{36})^{24}$, $p_3 = 1 - (\frac{215}{216})^{144}$. Porównać liczby p_2 i p_3.

(5 pt.) **EKSTRA.** Wyjaśnić, dlaczego de Tignasse mógł uważać te prawdopodobieństwa za równe.

---

4. (5 pt.) Dla jakich liczb rzeczywistych a istnieje taka liczba naturalna k, że dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq k$ zachodzi nierówność $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > a$?

(5 pt.) Dla tych liczb $a \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$, dla których jest to możliwe, wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną k taką, że z nierówności $n \geq k$ wynika nierówność $a < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

---

5. (3 pt.) Znaleźć sumę $3^n - \binom{n}{1} \cdot 3^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 3^{n-2} - \binom{n}{3} \cdot 3^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} \cdot 3 + (-1)^n$.

(7 pt.) Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną k taką, że dla każdej liczby naturalnej $n > k$ zachodzi nierówność podwójna $\quad 4^n > 3^n + \binom{n}{2} \cdot 3^{n-2} + \binom{n}{4} \cdot 3^{n-4} + \binom{n}{6} \cdot 3^{n-6} + \cdots > n^2 \cdot 3^n$.

---

6. (10 pt.) Niech $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ i $a_{n+2} = 1{,}5\, a_{n+1} + a_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Wykazać, że ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ ma granicę i znaleźć ją.

---

7. (10 pt.) Czy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{2n + \cos(n\pi)}$ jest zbieżny? A czy jest zbieżny bezwzględnie?

---

8. (10 pt.) Niech $s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$. Dawno temu udowodniono, że istnieją liczby a, b, c takie, że dla każdej liczby $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ zachodzi równość

$$s_n = an^3 + bn^2 + cn. \qquad (\clubsuit)$$

Znaleźć liczby a, b, c i wykazać, że równość $(\clubsuit)$ ma miejsce dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Ciekawostki (przydatne lub nie): $\cos\pi = -1$; $\cos(2\pi) = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; jeśli $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, to $f(1) \approx 1{,}718281828$ i $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{308\sqrt{2}}{n}\right)^n = e^{308\sqrt{2}}$; $1 + x > 0 \Longrightarrow \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.